

Autoreferat rozprawy doktorskiej

„Wycena ryzyka rynkowego metodą wartości zagrożonej przy wykorzystaniu kopuli”

Autor: Andrzej Stryjek

Promotor: dr hab. Wanda Marcinkowska-Lewandowska, prof. SGH

1. WSTĘP

Problem kategorii ryzyka i zarządzania ryzykiem w praktyce gospodarczej, wraz z postępowaniem globalizacji, staje się problemem zajmującym nie tylko praktyków i teoretyków ekonomii, lecz także przedstawicieli innych nauk społecznych. Wielu współczesnych naukowców postrzega ryzyko jako zagrożenie dla dalszego rozwoju w skali światowej.

„ ... świat nie potrafi już kontrolować zagrożeń stwarzanych przez nowoczesność, a ściślej: gaśnie wiara, że współczesne społeczeństwo zdoła zapanować nad wywoływanymi przez siebie zagrożeniami – nie z racji zaniedbań i niepowodzeń nowoczesności, lecz raczej jej zwycięstw (...). Stało się oczywiste, że odpowiedzi pojedynczych państw na to globalne wyzwanie są jak reakcje epoki kamienia na problemy epoki przemysłowej.” Słowa te pochodzą z książki Urlicha Becka pt. *„Społeczeństwo światowego ryzyka”*, w której autor zwraca uwagę na fakt, że wraz z postępującą globalizacją, w wielu obszarach działania ludzkości, jednostki mają coraz mniejszy wpływ na ograniczanie skutków ryzyka.

Spostrzeżenie to dotyczy również procesów zachodzących w gospodarce. W ostatnich dekadach byliśmy świadkami kryzysów finansowych, które powstały na skutek braku odpowiedniej kontroli i ograniczania ryzyka inwestycji (np. upadek Barings Banku, kryzys na rynku kredytów hipotecyjnych w USA w 2007 roku). Globalny charakter operacji na rynkach finansowych sprawia, że jednostkowe przypadki podejmowania działalności obciążonej zbyt dużym ryzykiem mają wpływ na inne, nawet bardzo odległe rynki.

Historia wykorzystania nauk ilościowych w celu ograniczania skutków ryzyka w przypadku decyzji o charakterze gospodarczym, ma swój początek w drugiej połowie osiemnastego wieku. Wówczas mechanizmem ograniczania efektów ryzyka były ubezpieczenia. Dwieście lat później, gdy na rynkach finansowych zaczęto używać instrumentów pochodnych, zaistniała potrzeba skonstruowania nowych procedur zarządzania ryzykiem. Dziś w wielu państwach podejmuje się kroki, które mają na celu zobowiązać instytucje finansowe do właściwego zabezpieczania się przed ryzykiem.

W państwach Unii Europejskiej od kilku lat wprowadzane są dwa duże projekty, tj. *Bazylea II* i *Wyplacalność II*. Pierwszy dotyczy kontroli i ograniczania ryzyka w systemie bankowym, a drugi w firmach ubezpieczeniowych. Oba projekty są oparte na założeniu, że instytucje nie mogą być zmuszone do stosowania jednego, uniwersalnego modelu zarządzania ryzykiem. Model ten powinien być dopasowany do profilu i struktury działalności instytucji. W drugim filarze *Bazylei II* zachęca się do tworzenia własnych modeli wyceny ryzyka rynkowego przy użyciu metody wartości zagrożonej.

Idea pomiaru ryzyka za pomocą wartości zagrożonej (*VaR*) polega na wyznaczeniu kwoty kapitału, która będzie stanowić zabezpieczenie przed ewentualnymi wysokimi stratami podjętej inwestycji w przyjętym przez inwestora okresie inwestycji. Dla określenia wielkości tego zabezpieczenia należy arbitralnie przyjąć długość horyzontu czasowego, a także taki poziom prawdopodobieństwa osiągnięcia znacznych strat, jaki jest w stanie zaakceptować inwestor. Najczęściej prawo wymaga, aby horyzont czasowy stanowił jeden dzień roboczy, a poziom prawdopodobieństwa nie przekraczał 1%.

Ryzyko rynkowe inwestycji obejmuje ryzyko związane ze zmianą kursów walutowych, zmianą stopy procentowej, zmianą cen akcji i zmianą cen towarów. Na ostateczny poziom tego ryzyka ma wpływ wiele czynników. Nie można założyć, że czynniki te są niezależne, zatem w metodzie wyceny ryzyka trzeba uwzględnić strukturę zależności między nimi.

W ostatnich latach do kompleksowego opisu struktury zależności między zmiennymi losowymi stosowane są kopule (funkcje łączące). Mają one przewagę nad typowymi miernikami stopnia zależności (współczynnik korelacji liniowej, τ -Kendalla, ρ -Spearmana) z powodu, że nie są pojedynczą liczbą, lecz funkcją określoną w przestrzeni \mathbb{R}^n .

Funkcja łącząca \mathcal{C} , to odwzorowanie $\mathcal{C}: (0, 1)^n \rightarrow \mathbb{R}$ będące dystrybuantą n -wymiarowej zmiennej losowej, której wszystkie rozkłady brzegowe są rozkładami jednostajnymi na $(0, 1)$.

Kopula jest łącznikiem między dystrybuantą F łącznego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X_1, X_2, \dots, X_n) , a dystrybuantami F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jej rozkładów brzegowych, tj.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{C}(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)),$$

co wynika z twierdzenia Sklara (1959).

Wykorzystanie kopuli w praktyce wymaga, aby opracować metodę pozwalającą, na podstawie danych empirycznych, oszacować parametr (parametry) funkcji łączącej \mathcal{C} . Typowe procedury estymacji tego parametru to:

- metoda największej wiarygodności,
- kanoniczna metoda największej wiarygodności,
- metoda wnioskowania dla rozkładów brzegowych,
- metoda kalibracji.

W pracach (Tsukahara, 2005), (Foscolo, 2008) i (Weiss, 2010) wykorzystano do estymacji parametru kopuli **metodę minimalnej odległości** (MMO). Wyniki analiz tych prac pozwalają przypuścić, że MMO może być dobrym sposobem szacowania parametru kopuli. Rozwijanie dotychczasowych technik w tym obszarze jest celowe. A jednocześnie interesującym zagadnieniem jest określenie efektywności wykorzystania MMO w modelu wyceny ryzyka rynkowego na podstawie wartości zagrożonej.

2. CEL PRACY I TEZY BADAWCZE

Pierwotne metodologie wyznaczania wartości VaR są oparte na analizie historycznych wartości podjętej inwestycji (metoda historyczna) lub na założeniu, że łączny rozkład zmiennej utworzonej z czynników ryzyka inwestycji jest rozkładem normalnym (metoda kowariancji i metoda symulacji Monte Carlo). Wspomniane wyżej zalecenia prawne tworzenia własnych modeli obliczania VaR dają szerokie pole do prowadzenia badań naukowych w zakresie obliczania wartości zagrożonej.

Głównym celem prezentowanej dysertacji jest konstrukcja metody szacowania wartości zagrożonej tak, aby zależność między czynnikami ryzyka była modelowana za pomocą funkcji łączącej, a otrzymane wartości miary VaR akceptowalne. Działanie i skuteczność

zapropionowanej metody jest porównana z metodami standardowymi, tj. metodą kowariancji, metodą historyczną i metodą symulacji MC.

Realizacja badania wymagała sprawdzenia następujących tez.

- Ryzyko rynkowe jest zjawiskiem, które można wyceniać za pomocą metod ilościowych (miary ryzyka).
- Wartość zagrożona jest miarą ryzyka.
- Wartość zagrożona, jako powszechnie stosowana miara ryzyka, ma wady polegające na pomijaniu odniesień do jej teoretycznych założeń.
- Regulacje prawne zachęcają instytucje finansowe do używania metody wartości zagrożonej mimo jej niedoskonałości.
- Istnieją wskaźniki, które umożliwiają porównanie skuteczności różnych metod estymacji *VaR*.
- Kopule są narzędziem, które można efektywnie stosować do opisu zależności między dwoma lub wieloma czynnikami ryzyka.
- Estymacja parametru kopuli na podstawie szeregów empirycznych oraz wybór optymalnej rodziny kopuli dla zgromadzonych danych mogą być dokonane przy wykorzystaniu metody minimalnej odległości (MMO) z odległością indukowaną przez normę $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ z przestrzeni l^p , gdzie $p \geq 1$.

3. METODY BADAWCZE

Realizacja przyjętego celu pracy doktorskiej oraz sformułowanych tez badawczych wymagała zastosowania szeregu metod badawczych.

Pierwsza część dysertacji, o charakterze teoretycznym, wymagała wnikliwych studiów i analizy literatury z zakresu najważniejszych pojęć zawartych w temacie rozprawy.

- Definicji ryzyka jako kategorii mierzalnej.
- Definicji miary ryzyka oraz analizy własności, które miara ryzyka powinna posiadać.
- Definicji, własności i sposobów obliczania wartości zagrożonej,
- Analizy aktów prawnych, które determinują wykorzystanie wartości zagrożonej w praktyce gospodarczej.
- Przedstawienia definicji i własności funkcji łączących,

- Analizy metod estymacji parametrów kopuli i metod wyboru optymalnej rodziny kopuli do zgromadzonych danych empirycznych.

Tym samym w pracy zostały udokumentowane najważniejsze dotychczasowe osiągnięcia w zakresie metod estymacji parametrów kopuli, metod szacowania wartości zagrożonej i zastosowania funkcji łączących do obliczania VaR . W tej części dysertacji metodą badawczą jest porównanie. Pojęcia takie, jak ryzyko, miara ryzyka, wartości zagrożona - nie są jednolicie definiowane. Dlatego konieczne było wnikliwe rozważenie wad i zalet większości określeń, stosowanych dla tych pojęć w literaturze, aby ostatecznie sformułować pojęcie ryzyka i wartości zagrożonej obowiązujące w dalszej części pracy doktorskiej.

W drugiej części pracy, części o charakterze analizy empirycznej, dokonano oceny efektywności estymacji parametru kopuli przy wykorzystaniu metody minimalnej odległości oraz sprawdzenia na podstawie danych empirycznych jakości nowej procedury obliczania VaR . W tym etapie badania stosowano dwie metody badawcze: metodę eksperymentu (symulacji komputerowych) oraz metodę statystyczną.

Symulacje komputerowe są przeprowadzone za pomocą autorskich procedur z wykorzystaniem pakietów R.3.1.2 i Mathematica 9. Polegają one na generowaniu dużych, wielowymiarowych prób z rozkładu o zadanej rodzinie kopuli i znanym parametrze funkcji łączącej. Natomiast do analizy statystycznej danych empirycznych użytych w badaniu oraz statystycznego opisu i weryfikacji symulowanych prób wykorzystano wiele wskaźników i testów statystycznych, np.:

- obciążenie i błąd średniokwadratowy estymatora,
- test Shapiro-Wilka, test Kupca, test Christoffersena,
- funkcja strat¹ dla wartości zagrożonej.

¹ W badaniu wykorzystano dwie funkcje: $L(VaR_{\alpha}^t(X), x_t) = \begin{cases} (x_t + VaR_{\alpha}^t(X))^2, & \text{gdy } x_t \leq -VaR_{\alpha}^t(X) \\ 0, & \text{gdy } x_t > -VaR_{\alpha}^t(X) \end{cases}$ oraz

$$L(VaR_{\alpha}^t(X), x_t) = \begin{cases} \frac{(|x_t| - |VaR_{\alpha}^t(X)|)^2}{|VaR_{\alpha}^t(X)|}, & \text{gdy } x_t \leq -VaR_{\alpha}^t(X) \\ 0, & \text{gdy } x_t > -VaR_{\alpha}^t(X) \end{cases}$$

4. STRUKTURA I OPIS PRACY

Przedstawione w poprzednich punktach tezy i metody badawcze znajdują swoje odzwierciedlenie w strukturze pracy doktorskiej. Składa się ona z pięciu rozdziałów, których pierwsze cztery mają głównie charakter teoretyczny, a piąty dotyczy analizy empirycznej. Ponadto praca zawiera wstęp, podsumowanie, spis cytowanej literatury oraz załącznik. Załącznik prezentuje własne opracowanie tabel i wykresów będących ilustracją pośrednich wyników prowadzonych badań, które nie mają aż tak dużej wagi, aby umieszczać je w poszczególnych rozdziałach.

Pierwszy rozdział dysertacji ma charakter wprowadzenia czytelnika w niuanse związane z pojęciem ryzyka. Oprócz rysu historycznego tego pojęcia, przedstawione są różne rodzaje ryzyka – zwłaszcza ryzyko rynkowe będące tematem pracy – oraz prezentacja tendencji do określenia miary ryzyka przez zestaw odpowiednich własności tej miary.

Rozdział drugi dotyczy przeglądu miar ryzyka. Są one podzielone na trzy kategorie: miary ryzyka w ujęciu neutralnym, miary ryzyka w ujęciu negatywnym i miary wrażliwości. Dla każdej z nich, jeśli tylko jej konstrukcja na to pozwala, rozważa się, które z definicji aksjomatycznych z poprzedniego rozdziału przystają do danego miernika ryzyka. Celem tych rozważań jest uzasadnienie, że niektóre stosowane w praktyce sposoby wyceny ryzyka nie posiadają w ogólności własności pożądaných z teoretycznego punktu widzenia. Przy tej okazji wykazano, że termin *wartość zagrożona* jest wieloznaczny.

Trzeci rozdział pracy zawiera przegląd metod estymacji wartości zagrożonej. Niektóre z tych nich są silnie związane z merytorycznym nurtem pracy i dlatego omawiane szczegółowo, a pozostałe jedynie sygnalizowane. Ponadto, w tej części dysertacji zawiera się omówienie różnych technik weryfikacji poprawności metody estymacji *VaR* oraz studium regulacji prawnych obowiązujących w Polsce a dotyczących dopuszczalności używania wartości zagrożonej przez instytucje finansowe przy wycenie ryzyka rynkowego. W końcowej części rozdziału na podstawie literatury oraz wcześniejszych badań autora stwierdzono, w których przypadkach i w jakim stopniu *VaR* nie spełnia postulatu o dywersyfikacji ryzyka dla portfela.

Rozdział czwarty pracy stanowi wprowadzenie w temat funkcji łączących. Po sformułowaniu definicji kopuli i przedstawieniu jej własności, rozdział zawiera obszerny przegląd przykładów funkcji łączących. W tej części pracy zasygnalizowany jest sposób, w

jaki można wykorzystać pojęcie kopuli do obliczania wartości zagrożonej. Omówione są także metody estymacji parametrów kopuli.

Ostatni rozdział dotyczy empirycznej części pracy doktorskiej. Po pierwsze, przedstawione są tam rezultaty dwóch badań symulacyjnych z wykorzystaniem kilku rodzin kopuli oraz najważniejszych metod estymacji ich parametrów. Badania uzasadniają, że za pomocą MMO można skutecznie wyznaczać oszacowania parametrów kopuli. Mimo, że metoda jest czasochłonna, to nie posiada wad, jakie są wymieniane w kontekście innych metod: skomplikowana postać analityczna funkcji wiarygodności w przypadku niektórych rodzin kopuli i brak możliwości wyrażenia analitycznie współczynników niezbędnych do zastosowania danej metody (np. współczynnika τ -Kendalla dla kopuli Gumbel-Barbetta). Estymacja przy pomocy MMO zakłada jedynie znajomość wzoru kopuli oraz dopuszczalnego zakresu wartości jej parametru (parametrów).

W pierwszej części badania dotyczącego skuteczności MMO rozważane jest siedem rodzin kopuli o wymiarze $n = 2$ i $n = 3$. Dla każdej z nich wylosowano pięć wartości ich parametrów. Wartości obciążenia i błędu średniokwadratowego są obliczone na podstawie prób o liczebności $T = 50$ i $T = 100$. W drugiej części tego badania są analizowane trzy rodziny dwuwymiarowych kopuli. Ich wybór wynika z uwzględnienia dodatkowo estymacji metodą kalibracji oraz estymacji przedziałowej. Obciążenie i błędy średniokwadratowe estymacji wyznaczone są na podstawie prób o liczebności $T = 250$ i $T = 500$ dla czterdziestu różnych wartości parametrów kopuli Claytona, Gumbela i Farlie_Gumbel-Morgensterna (FGM).

W drugiej części piątego rozdziału znajduje się opis i wyniki analizy empirycznej dotyczącej portfela narażonego na trzy czynniki ryzyka w okresie od 05.07.2007 do 27.02.2014. Dane empiryczne to dzienne, logarytmiczne stopy zwrotu wyznaczone dla kursu EUR/PLN, ceny złota i indeksu WIG20 z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. W badaniu oszacowano wartość zagrożoną w horyzoncie jednego dnia na podstawie 250 obserwacji z dni poprzednich. Precyzując, jeśli dzień wyznaczenia VaR oznaczymy jako t_0 , to wartość zagrożoną oszacowano na podstawie danych z momentów $t = t_0 - 250, t_0 - 249, \dots, t_0 - 1$. W prezentowanym badaniu wyznaczono estymatory VaR dla 1432 dni przyjmując poziom tolerancji dla wartości zagrożonej $\alpha = 1\%$ lub $\alpha = 5\%$ za pomocą:

- metody kowariancji,
- metody symulacji MC,

- metody historycznej,
- metody symulacji z wykorzystaniem kopuli Claytona, Gumbela, Gumbela-Barbetta, Franka, Farlie-Gumbel-Morgensterna, Ali-Mikhail-Haqa i uogólnionej kopuli Claytona.

Każdy przypadek, gdy w danym dniu rzeczywista strata na portfelu przekroczyła obliczoną wartość VaR , nazywa się wyjątkiem (przekroczeniem). Liczbę wyjątków zliczano dla każdej metody estymacji VaR w okresie testowym (okres 1432 dni).

Opisany w tej części pracy doktorskiej schemat wyznaczania wartości zagrożonej metodą symulacji z wykorzystaniem wymienionych funkcji łączących jest realizacją głównego zadania badawczego dysertacji.

Należy nadmienić, że wartość dodaną pracy stanowi wykorzystanie we wszystkich badaniach opisanych w ostatnim rozdziale pracy, użycie MMO z odległością indukowaną przez normę z przestrzeni l^p w rozszerzonym zakresie, tj. dla $p \in \{1; 1,5; 2; 4; 8\}$ oraz $p \rightarrow +\infty$, a nie jak dotychczas wyłącznie dla $p = 1$, $p = 2$ i $p \rightarrow \infty$.

5. WYNIKI

W przeprowadzonych badaniach symulacyjnych dotyczących porównania efektywności różnych metod estymacji parametru kopuli otrzymano następujące wyniki:

- Wraz ze zwiększaniem liczebności próby T metoda minimalnej odległości jest skuteczniejsza pod względem wielkości obciążenia estymatora niż metoda kalibracji i KMNWinn
- KMNW nie powinna być stosowana do szacowania parametru kopuli Gumbela, ponieważ ma istotnie większe obciążenie i błąd średniokwadratowy niż pozostałe metody.
- Estymacja przedziałowa nie jest skuteczną metodą szacowania parametru funkcji łączącej.
- Przy zastosowaniu MMO do estymacji parametru kopuli najlepsze wyniki estymacji są, gdy funkcja odległości indukowana przez normę w przestrzeni l^p ($p \geq 1$) ma wartość $p \approx 1,5$.

W analizie empirycznej dotyczącej procedury obliczania wartości zagrożonej z wykorzystaniem kopuli otrzymano rezultaty wymienione poniżej.

- 1) Metoda kowariancji i metoda symulacji MC dla $\alpha = 1\%$ mają za wysoki udział wyjątków w okresie testowym.
- 2) Dla poziomu tolerancji $\alpha = 1\%$ prawie wszystkie metody wyznaczania *VaR* są akceptowalne ze względu na wartość statystyki Kupca i Christoffersena.
- 3) Metoda historyczna dla obu poziomów tolerancji α miała odsetek liczby przekroczeń w okresie testowym najbardziej zbliżony do α .
- 4) Hipotezę o poprawności metod szacowania wartości zagrożonej dla $\alpha = 5\%$ należy odrzucić w przypadku estymacji KMNW, a także dla kopuli Claytona, Gumbela, Franka i uogólnionej kopuli Claytona, gdy estymacja prowadzona jest MMO.
- 5) Dla danych empirycznych użytych w badaniu estymacja wartości zagrożonej z wykorzystaniem funkcji łączącej Claytona dla $p \rightarrow \infty$ i poziomu tolerancji $\alpha = 1\%$ oraz estymacja z wykorzystaniem kopuli FGM dla $p = 8$ i poziomu $\alpha = 5\%$ są najskuteczniejsze. Przy czym wybór ten jest uzasadniony po uwzględnieniu jednocześnie poniższych kryteriów:
 - udział przekroczeń w okresie testowym mniejszy niż założony poziom tolerancji α ,
 - wartości statystyk testu Kupca i Christoffersena mniejsze niż odpowiednie wartości krytyczne,
 - najmniejsza wartość funkcji strat w okresie testowym spośród wszystkich rozważanych metod obliczania *VaR*.
- 6) Analiza wartości funkcji odległości przy estymacji MMO dla $p \in \{1; 1,5; 2; 4; 8\}$ i $p \rightarrow +\infty$ najlepiej dopasowaną rodziną do danych empirycznych jest kopula FGM.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

Metody szacowania *VaR* oparte na symulacjach z wykorzystaniem funkcji łączących są skutecznym i często lepszym niż metody standardowe sposobem estymacji wartości zagrożonej. Do oszacowania wartości parametrów kopuli można z powodzeniem stosować

metodę MMO. W analizie empirycznej nie potwierdziła się hipoteza, że przy zastosowaniu do estymacji parametrów kopuli MMO, wartość parametru p w funkcji odległości powinna być zbliżona do 1,5.

Zaprezentowana praca ukazuje szereg możliwości prowadzenia dalszych analiz dotyczących zagadnienia estymacji wartości zagrożonej za pomocą funkcji łączących. Z pewnością analizę empiryczną można poszerzać w kierunku wykorzystania innych szeregów danych np. uwzględnienie większej liczby czynników ryzyka, wprowadzenia do portfela instrumentów pochodnych, a także pobranie danych z innych rynków finansowych niż rynek polski.

Andrzej Stypka

BIBLIOGRAFIA

- Acerbi, C. i Tasche, D., 2001. *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*, [Online] Dostępny w: <http://www.bis.org/bcbs/ca/acertasc.pdf> [Dostęp: 12.10.2012].
- Albrecht, P., 2003. Risk measures. *SonderForschungsBereich504*, No. 03-01, *Contribution prepared for: Encyclopedia of Actuarial Science John Wiley & Sons*, [Online] Dostępny w: <http://www.ime.usp.br/~rvicente/risco/albrechts.pdf> [Dostęp: 12.10.2012].
- Artzner, P. i in., 1999. Coherent measures of risk. *Math. Fin* 9 (3).
- Bałamut, T., 2002. *Metody estymacji VaR*, Warszawa: NBP.
- Beck, U., 2012. *Spółeczeństwo światowego ryzyka. W poszukiwaniu utraconego bezpieczeństwa*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR.
- Bernstein, P. L., 1997. *Przeciw bogom. Niezwykłe dzieje ryzyka*. Warszawa: WIG-Press.
- Best, P., 2000. *Wartość narażona na ryzyko: obliczanie i wdrażanie modelu VaR*. Kraków: Oficyna Ekonomiczna: Dom wydaw. ABC.
- Biecek, P., 2008. *Przewodnik po pakiecie R*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS.
- Bouye, E. i in., 2000. *Copulas for Finance. A Reading Guide and Some Applications*, [Online] Dostępny w: <http://thierry-roncalli.com/download/copula-survey.pdf> [Dostęp: 12.10.2012].
- Breymann, W., Dias, A. i Embrechts, P., 2003. Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance. *Quantitative Finance* 3, s. 1-14.
- Cherubini, U. i in., 2004. *Copula method in finance*. Chichester: John Wiley and Sons.
- Doman, R., 2011. *Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*. Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Durrleman, V. i in., 2000. *Which copula is the right one?*, France: Groupe de Recherche Operationelle Credit Lyonnais, [Online] Dostępny w: [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/9ef115c2bc569a7dc1257788002ae848/\\$FILE/copula-choice.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/9ef115c2bc569a7dc1257788002ae848/$FILE/copula-choice.pdf) [Dostęp: 12.10.2012].

- Dys, J., 2010. *Dominacja stochastyczna a użyteczność*. [Online] Dostępny w: http://apps.eui.eu/Personal/Researchers/JoannaFranaszek/prace/dominacja_stochastyczna.pdf [Dostęp: 16.04.2015].
- Embrechts, P., Lindskog, F., McNail, A., 2001. *Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. Zurich: Department of Mathematics, [Online]. Dostępny w: <https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/copchapter.pdf> [Dostęp: 12.10.2012].
- Embrechts, P., McNeil, A. i Sraumann, D., 2002. Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. W: M. Dempster, red. *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge: Cambridge University Press, s. 176-223.
- Fischer, M., 2009. *Multivariate copula models at work*, [Online] Dostępny w: <https://www.rmetrics.org/files/Meielisalp2009/Presentations/Fischer.pdf> [Dostęp: 12.10.2012].
- Foscolo, E. i in., 2008. *New Estimators for Copula-Base models*, [Online] Dostępny w: <https://ceumathematica.files.wordpress.com/2008/09/articulo.pdf> [Dostęp: 12.10.2012].
- Franke, J., Hardle, W. i Hafner, C., 2004. Copulas and Value at Risk. W: J. Franke, W. Hardle i C. Hafner (red.), *Statistics of Financial Markets*. New York: Springer, s. 301-310.
- Gątarek, D. i in., 2001. *Nowoczesne metody zarządzania ryzykiem*. Warszawa: WIG-Press.
- Genest, C., Quessy, J.F. i Remillard, B., 2006. Goodness-of-fit Procedures for Copula Models Based on the Probability Integral Transformation. *Scandinavian Journal of Statistics*, s. 1-30.
- Hałaj, G., 2008. Przegląd metod badania płynności banków. *Bank i Kredyt*, lipiec, s. 14-27.
- Heilpern, S., 2007. *Funkcje łączące*. Wrocław: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego.
- Hull, J. C., 2011. *Zarządzanie ryzykiem instytucji finansowych*. Warszawa: Wydawnictwa Profesjonalne PWN.
- Jajuga, K. i in., 2007. *Zarządzanie ryzykiem*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Jajuga, K. i Jajuga, T., 2005. *Inwestycje :instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Jakubowski, J., 2004. *Modele rynków finansowych*. Warszawa: SCRIPT.

- Janicki, A. i Izydorczyk, A., 2001. *Komputerowe metody z modelowaniu stochastycznym*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- Jaworski, P. i Micał, J., 2005. *Modele matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*. Warszawa: poltext.
- Joe, H., 1997. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. New York: Chappman & Hall/CRC.
- Joe, H. i Xu, J. J., 1996. *The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models*, University of British Columbia: Department of Statistics.
- Jorion, P., 2000. *Value at Risk. The new benchmark for managing financial risk*. New York: McGraw-Hill.
- Kijima, M. i Ohnishi, M., 1993. Mean-Risk Analysis of Risk Aversion and Wealth Effects on Optimal Portfolios with Multiple Investment Opportunities. *Annals of Operations Research*, Issue 45, s. 147-163.
- Kpanzou, T., 2007. *Copulas in statistics*, Stellenbosch: University of Stellenbosch, [Online] Dostępny w: http://users.aims.ac.za/~tchilabalo/Kpanzou_Copulas_2007.pdf [Dostęp: 12.10.2012].
- Kupiec, P., 1995. Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models. *Journal of Derivatives*, s. 73-84.
- Luenberger, D. G., 2003. *Teoria inwestycji finansowych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Lochowski, R., 2010. *Zmienność i jej ilościowe ujęcie za pomocą miar wybranych instrumentów finansowych w okresie kryzysu*. Warszawa, Akademia Leona Koźmińskiego.
- Markowitz, H., 1952. Portfolio selection. *Journal of Finance*, Tom (7) , s. 77-91.
- Matkowski, P., 2006. *Zarządzanie ryzykiem operacyjnym*. Kraków: Oficyna Ekonomiczna: Wolter Kluwer.
- Mendes, B., de Melo, E. i Nelsen, R., 2007. Robust fits for copula models. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, s. 997-1017.
- Mentel, G., 2011. *Value at Risk w warunkach polskiego rynku kapitałowego*. Warszawa: CeDeWu.

- Nelsen, R. B., 2006. *An introduction to copulas*. 2nd ed. red. New York: Springer.
- Niewęglowski, M., 2001. *Value-at-Risk z uwzględnieniem ryzyka kredytowego*, Warszawa: praca magisterska na wydziale MiNI PW.
- Olson, D. L. i Wu, D. 2010. *Enterprise Risk Management Models*. Berlin-Heidelberg: Springer.
- Papła, D. i Piontek, K., 2003. *Zastosowanie rozkładów alfa-stabilnych i funkcji powiązań (copula) w obliczaniu wartości zagrożonej (VaR)*, Wrocław: Akademia Ekonomiczna.
- Pedersen, C. S. i Satchell, S. E., 1998. An Extended Family of Financial-Risk Measures. *The Geneva Paper on Risk and Insurance Theory*, Issue 23, s. 89-117.
- Piontek, K., 2007. W: P. Chrzan, red. *Matematyczne i ekonometryczne metody oceny ryzyka finansowego*. Katowice: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, s. 113-124.
- Pollatsek, A., 1970. A Theory of Risk. *Journal of Mathematical Psychology*, 7, s. 540-553.
- Rockafellar, R. T., Uryasev, S. i Zabarankin, M., 2006. Generalized deviations in risk analysis. *Finance and Stochastics*, 10, s. 51-74.
- Rockafellar, R., Urysaev, S. i Zabarankin, M., 2001. Deviation measures in risk analysis and optimization. *Research Report #2002-7*, Gainesville: Department of Industrial and Systems Engineering University of Florida.
- Rouvinez, C., 1997. Going Greek with VaR. *Risk* 10, s. 57-65.
- Stryjek, A., 2005. *Jak mierzyć ryzyko instrumentów finansowych? Podejście aksjomatyczne*, Warszawa: Szkoła Główna Handlowa.
- Stryjek, A., 2007. *Value at Risk a dywersyfikacja ryzyka*, Warszawa: Szkoła Główna Handlowa.
- Stryjek, A., 2008a. *Efekt dywersyfikacji a efektywność klasycznych metod wyceny wartości zagrożonej (VaR) dla portfeli akcji GPW*, Warszawa: Szkoła Główna Handlowa.
- Stryjek, A., 2008b. *Zastosowanie kopuli do szacowania wartości zagrożonej*, Warszawa: Szkoła Główna Handlowa.
- Stryjek, A., 2009. Zastosowanie miar zależności zmiennych losowych oraz kopuli Clayтона i Gumbel-Hougaard do szacowania wartości zagrożonej. *Przegląd Statystyczny*, s. 67-80.

- Stryjek, A., 2011. *Porównanie wybranych metod estymacji parametru rodziny kopuli*, Warszawa: Szkoła Główna Handlowa w Warszawie.
- Tarczyński, W. i Mojsiewicz, M., 2001. *Zarządzanie ryzykiem*. Warszawa: PWE.
- Tsukahara, H., 2005. Semiparametric estimation in copula models. *The Canadian Journal of Statistics*, s. 357-375.
- Uniejewski, P., 2004. *Koherentne miary ryzyka*, Wrocław: Politechnika Wrocławska.
- Von Neumann, J. i Morgenstern, O., 1944. *Theory of games and economic behaviour*. New York: Princeton University Press.
- Weiss, G. N. F., 2010. Copula parameter estimation: numerical considerations and implications for risk management. *The Journal of Risk*, s. 17-53.
- Winkler-Drews, T., 2009. *Zarządzanie ryzykiem zmiany ceny*. Warszawa: PWE.
- Wolfowitz, J., 1953. Estimation by the minimum distance method. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Tom 5, s. 9-23.
- Zagst, R., 2000. *Interest-rate management*. Berlin: Springer.